

Die Entwicklung der Quantentheorie seit der Begründung der Quantenmechanik

Von Prof. Dr. S. FLÜGGE, Marburg, Institut für Struktur der Materie

Von der Entdeckung des Wirkungsquantums durch *Max Planck* im Jahre 1900 geht über die Erkenntnis seiner Bedeutung für die gesamte Atomphysik durch *Niels Bohr* im Jahre 1913 ein gerader Weg zur Aufstellung der Grundgesetze der neuen Quantenmechanik durch *Heisenberg* und *Schrödinger* 1926. Was schon *Bohr* vermutet hatte, war damit zur Gewißheit geworden. Die Entdeckung *Plancks* bedeutete nicht ephemere Zutat zur klassischen Physik, sondern den ersten Schritt zu einer völlig neuen Beschreibung der materiellen Welt, welche die Erkenntnis der Verbesserungsbedürftigkeit des bisherigen Bildes einschloß. Während der ältere *Planck* noch mit der zurückhaltenden Behutsamkeit des Reformators zu Werke ging, verlor die jüngere Generation bald die Scheu vor dem Neuen, mit dem sie aufwuchs, und die Ehrfurcht vor dem Alten, das ihr fremd wurde. Sie stieß zu Konsequenzen vor wie dem Zweifel an der vollständigen Kausalität des physikalischen Geschehens, der Überzeugung von prinzipiellen, der Natur selbst innewohnenden Grenzen der Messung und der Beschreibbarkeit, der Vereinigung von Zügen der Massenpunktmechanik mit solchen der Kontinuumsphysik zu einem zwar unanschaulichen aber logisch einwandfreien Gesamtbilde, das die klassische Physik nur mehr als Grenzfall einschloß. Solche Anschauungen und Entdeckungen waren in ihrer Auswirkung zu revolutionär, als daß mit der Aufstellung der neuen Gesetze 1926 – welche die ältere Epoche abschloß und krönte – nicht gleichzeitig ein starker Strom neuen physikalischen Lebens entsprungen wäre, nicht nur in Gestalt der selbstverständlichen Anwendung und Erprobung der neuen Bilder an dem umfangreichen experimentellen Material der Atomphysik, das sich nun erst wirklich erschloß, sondern auch als Weiterentwicklung eben jener neuen Gedankenwelt. Von dieser Weiterentwicklung soll hier die Rede sein.

Die neue Quantenmechanik war zunächst ohne jede Rücksicht auf die Begriffsbildungen und Erkenntnisse der Relativitätstheorie entwickelt worden. Das genügte zur Behandlung vieler atomarer – und wir können hinzufügen auch nuklearer – Probleme, bei denen alle vorkommenden Geschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit bleiben. Immerhin gibt es eine Reihe von Problemen der Atomphysik, bei denen relativistische Effekte, wenn auch oftmals nur als Korrektur, spürbar werden. Daraus erwuchs eine wichtige Aufgabe für die Weiterentwicklung.

Die grundlegenden Arbeiten des Jahres 1926 beschränken sich ganz auf die Mechanik und auch da eigentlich nur auf einen Ausschnitt, nämlich die Kinematik der Massenpunktsysteme. Denn nur der kinematische Rahmen, in welchem die Kräfte wirken, ist verändert; die Kräfte werden unverändert aus der klassischen Physik übernommen: welcher Herkunft sie auch immer sein mögen, die *Schrödinger*-Gleichung bietet keine Handhabe, an ihrer klassischen Form zu zweifeln. Hierin liegt eine Zwiespältigkeit der Theorie, die zwar nicht ihre Richtigkeit, wohl aber ihre begriffliche Klarheit in Frage stellt. Es ist begreiflich, daß dieser Zwiespalt nur gelöst werden konnte, wenn man sich die Frage vorlegte, was nun eigentlich aus jenem Gebiet der Physik werden sollte, aus dem die Kräfte stammten, d. h. aus der Elektrodynamik. Zu dieser Frage drängte auch aus anderen sehr konkreten Gründen die Entwicklung. Die auffälligsten und frühesten Auskünfte über die quantenhafte Struktur der Atome stammten nämlich aus der Erforschung der Spektrallinien, also von der Ausstrahlung des Lichtes durch die Atome her; *Plancks* Begründung der Quantenvorstellung überhaupt, war von der Strahlung ausgegangen und hatte in *Einsteins* Hand zum Begriff des Lichtquants geführt. Der Dualismus von Welle und Korpuskel, Angelpunkt von *Schrödingers* Mechanik der Materie, war also zuerst am Lichte erkannt worden. *Schrödingers* Theorie enthält aber über das Licht keine Aussage, sie blieb reine Mechanik und ließ eine Quantenoptik – Strahlungstheorie genannt – als dringendst notwendige Ergänzung erscheinen, die nun freilich ihrerseits

wieder zum Rahmen einer gesamten Quantenelektrodynamik ausgeweitet werden mußte, wenn es nicht bei unbefriedigenden Teillösungen bleiben sollte.

Die Schaffung einer neuen Elektrodynamik blieb nicht die einzige Forderung, welche sich im Anschluß an die Quantenmechanik erhob. Auch die Grundlagen der physikalischen Statistik wurden durch die Erkenntnisse der neuen Quantentheorie in Mitleidenschaft gezogen. Die Ununterscheidbarkeit der Elementarteilchen einerseits (eine Erkenntnis, die erst um 1926 auftauchte), die scharfe Trennung verschiedener Zustände infolge der Energiequantelung andererseits (was man schon in der vorhergehenden Phase der Entwicklung überblickte) mußten sich in Änderungen der klassischen Gesetze und in einer schärferen begrifflichen Fassung auswirken. Soweit die Thermodynamik auf die Statistik aufgebaut ist, konnte man daher auch dort teils neue Erkenntnisse, teils Abänderungen erwarten.

Schließlich bestand die Möglichkeit, daß durch die neuen Erkenntnisse und Entdeckungen nicht nur Abänderungen der alten klassischen Zweige der Physik auftreten, daß es also neben der Quantenmechanik eine Quantenelektrodynamik, eine Quantenoptik, eine Quantenstatistik und darauf fußend, vielleicht auch eine Quantenthermodynamik geben sollte, sondern daß auch ganz neue Zweige daneben sich bilden könnten. Auch das scheint der Fall zu sein. Die Elektrodynamik ist charakterisiert durch die besondere Art von Kräften, von denen sie handelt, eben den elektrischen (und magnetischen). Die Entdeckung andersartiger Kräfte im Aufbau der Atomkerne, die sich nicht hierauf zurückführen lassen, mußte neben der Elektrodynamik einen neuen Zweig der Physik entstehen lassen, bei dem es von Anfang an klar war, daß seine Beschreibung im Rahmen einer klassischen Theorie unvollkommen sein würde und eine Quantisierung erforderlich sei. Dies blieb freilich eine spätere Sorge; in der ersten Phase nach 1926 wußte man davon noch nichts, und der Gegenstand der Forschung blieb allein das Elektron. Erst mit der zunehmenden Zahl der Elementarteilchen wurde es notwendig, an die Stelle spezieller Theorien, welche nur auf das Elektron zugeschnitten waren, eine allgemeine Theorie der Materie und der verschiedenartigen Elementarteilchen zu setzen.

1. Die relativistische Erweiterung

Die Quantenmechanik des Elektrons, dargestellt etwa in der *Schrödingers*chen Theorie, weist den Mangel auf, nicht relativistisch einwandfrei zu sein. Dies zeigt sich schon ganz unmittelbar in der offensichtlichen Unsymmetrie in Raum und Zeit; während die *Schrödingers*che Differentialgleichung von erster Ordnung in t ist, ist sie von zweiter Ordnung in x, y, z ; eben darauf beruht der wesentliche Unterschied zu den üblichen Wellengleichungen der klassischen Physik. Ein erster Versuch, die Theorie so zu erweitern, daß sie den Forderungen der Relativitätstheorie genügt, aber den nicht-relativistischen Grenzfall der *Schrödinger*-Theorie richtig einschließt, wurde von *Klein* und *Gordon* unternommen, deren Wellengleichung von zweiter Ordnung in Raum und Zeit ist, sich aber von den Wellengleichungen der klassischen Physik durch ein zusätzliches Glied unterscheidet, welches die Ruhemasse zum Ausdruck bringt, und außerdem die Einführung von Kräften gestattet, welche etwa von äußeren elektrischen und magnetischen Feldern auf die Welle ausgeübt werden.

Nun gab es eine bereits früher von *Sommerfeld* als relativistischer Effekt erkannte geringfügige Abweichung zwischen *Schrödinger*-Theorie und Erfahrung, welche als Prüfstein der *Klein-Gordons*chen Gleichung anzusehen war, nämlich die Feinstruktur im Spektrum und Termschema des Wasserstoffatoms. Die *Klein-Gordon*-Gleichung ergab auch Korrekturen der gewünschten Größenordnung, von quantitativer Richtigkeit konnte jedoch nicht die Rede sein. Andere, grundsätzliche Bedenken, ergaben

sich später. Es zeigte sich nämlich, daß der Ausdruck, den man im unrelativistischen Grenzfall gewohnt war als Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons in einem Volumelement zu deuten, im relativistischen Gebiet so verändert wurde, daß er dort auch negativ werden konnte, was offensichtlich nicht mehr die alte Deutung gestattete. Endlich, und das wurde der entscheidende Ansatzpunkt einer richtigen Theorie, zeigte sich immer deutlicher, daß das Auftreten der ersten Zeitableitung allein in der Wellengleichung ein viel grundlegenderer Zug war als dasjenige der zweiten Ableitungen nach den Koordinaten, und daß es begrifflich viel leichter sein mußte, jene als diese aufzugeben, d. h. als Ziel eine Wellengleichung aufzustellen, welche von erster Ordnung sowohl in Raum als Zeit ist. Denn offenbar ist der zeitliche Ablauf des Geschehens festgelegt, wenn der Zustand des Systems zu irgend einem Zeitpunkt vollständig bekannt ist, dieser wird aber allein durch die Wellenfunktion ψ beschrieben. Wäre es anders, müßte man außerdem noch $\dot{\psi}$ kennen, so würde ein Quantenzustand eben nicht mehr durch eine Wellenfunktion ψ allein vollständig beschrieben werden können. Im Falle einer Differentialgleichung erster Ordnung in t genügt ja nun aber die Kenntnis von ψ , während eine solche zweiter Ordnung auch diejenige von $\dot{\psi}$ zur Festlegung des weiteren zeitlichen Verlaufs zur Lösung erfordert. Man denke dabei etwa an die analoge Situation der Newtonschen Dynamik, wo Ort und Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt gegeben sein müssen, um den Ablauf zu determinieren, weil die Gleichungen von zweiter Ordnung in t sind.

Eine solche Wellengleichung erster Ordnung hätte im einfachsten kräftefreien Fall wohl die Form haben müssen

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + b\psi$$

oder kurz

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (a \cdot \text{grad } \psi) + b\psi;$$

es wäre also nötig, einen festen Vektor a in die Gleichung einzuführen; da dieser Vektor eine Richtung ausgezeichnet hätte, wäre dadurch die selbstverständliche Isotropie des Raumes aufgehoben. Dagegen läßt sich der gewünschte Aufbau erzwingen, wenn wir anstelle einer Differentialgleichung für eine Funktion ψ ein System von vier Gleichungen für vier Funktionen ψ_k benutzen.

Das läßt sich an einem Beispiel leicht einschen. Bei nur einer Raumkoordinate x genügen nämlich bereits zwei Gleichungen, z. B.

$$(1) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{1}{\lambda} \psi_1; \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda} \psi_2.$$

Durch Anwendung der Operation $\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ auf die erste Gleichung erhält man durch einfaches Umrechnen

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\lambda^2} \psi_1;$$

durch Anwendung von $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ auf die zweite Gleichung dieselbe Wellengleichung zweiter Ordnung auch für ψ_2 . Eine Lorentz-Transformation ist eine Koordinatendrehung in der Ebene $x, y = i c t$; d. h. also, die Transformation auf die neuen Koordinaten lautet

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

oder, wegen $y' = i c t'$, $\alpha = i\beta$, reell geschrieben:

$$(3) \quad x' = x \cosh \beta - c t \sinh \beta \\ t' = -\frac{x}{c} \sinh \beta + t \cosh \beta$$

Man kann leicht nachprüfen, daß man bei Umrechnung des Gleichungssystems (1) auf diese Koordinaten die alte Form der Gleichungen erhalten kann, d. h. also, der Forderung der Lorentz-Invarianz genügt, wenn man gleichzeitig ψ_1, ψ_2 in bestimmter Weise mittransformiert. Man erhält nämlich zunächst

$$e^{-\beta} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x'} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t'} \right) = \frac{1}{\lambda} \psi_1; \quad e^{\beta} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x'} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t'} \right) = -\frac{1}{\lambda} \psi_2,$$

woraus man mit

$$(4) \quad \psi_1' = e^{-\frac{\beta}{2}} \psi_1; \quad \psi_2' = e^{\frac{\beta}{2}} \psi_2$$

sofort in den Größen ψ_1', ψ_2', x', t' zu den alten Gleichungen (1) zurückkommt. Die Größen ψ_1, ψ_2 bilden also zusammen ein Gebilde mit bestimmten Transformationsseigenschaften. Wäre ihre Verknüpfung von ähnlicher Art wie (3), so würden sie einen Vektor bilden; da stattdessen Gleichung (4) gilt, liegt ein neuer Begriff vor. Man nennt ein solches Gebilde einen Spinor ψ , die Größen ψ_1 und ψ_2 die Spinorkomponenten.

Der geschilderte Weg ist von Dirac gefunden worden. Ähnlich wie in der Schrödinger-Theorie läßt sich auch das hier benutzte System von vier miteinander gekoppelten Differentialgleichungen nicht für jede Energie durch stationäre, normierbare Funktionen lösen, sondern nur für bestimmte Eigenwerte der Energie. Auf diese Weise erhält man wieder das Termschema des Wasserstoffatoms, und zwar ergibt sich wieder eine Feinstruktur von der gleichen Größenordnung wie bei Zugrundelegung der Klein-Gordonschen Gleichung, diesmal aber in quantitativer Übereinstimmung mit dem Experiment. (Über eine in letzter Zeit entdeckte geringe Unstimmigkeit, die aber von höherer Ordnung klein ist, vergleiche unten).

Man kann in ganz roher Weise dies Diracsche System mit dem System der Maxwellschen Gleichungen vergleichen. Letztere sind ebenfalls linear und von erster Ordnung und verkoppeln eine Reihe von Feldgrößen miteinander. Man kann daraus Gleichungen zweiter Ordnung, gewöhnliche Wellengleichungen, bilden, welche entkoppelt sind, so daß die einzelnen Feldgrößen dabei unabhängig voneinander werden. Man sieht, daß die Lösungsmannigfaltigkeit dieser Wellengleichungen zu groß wird. Z. B. würde sich ergeben, daß in einer Lichtwelle elektrischer und magnetischer Vektor ganz unabhängig voneinander schwingen, während die Maxwellschen Gleichungen doch außerdem festlegen, daß beide aufeinander senkrecht stehen müssen. Wenn nun auch bei den Dirac-Gleichungen nur im kräftefreien Fall die einzelnen ψ -Komponenten bei der Iteration zu Gleichungen zweiter Ordnung von einander unabhängig werden, gehen doch auch hier gewisse zusätzliche Bindungen beim Iterieren verloren. Das Diracsche Gleichungssystem enthält daher physikalisch mehr als die Wellengleichung zweiter Ordnung von Klein-Gordon oder auch als die Schrödingersche Theorie.

Dieser neue physikalische Inhalt wird deutlich, wenn man sich mit dem Drehimpulssatz beschäftigt. Es stellt sich heraus, daß der im klassischen Sinne definierte Drehimpuls keinem Erhaltungssatz mehr genügt, daß er zu diesem Zweck vielmehr ergänzt werden muß durch einen zusätzlichen, vom Bewegungszustand des Elektrons unabhängigen Term. Es zeigt sich, daß dieser Term genau die Eigenschaften hinsichtlich seines Betrages und der unter dem Wort Richtungsquantelung zusammengefaßten Erscheinungen hat, welche auf Grund der spektroskopischen Erfahrung bereits zuvor von Goudsmit und Uhlenbeck als Spin des Elektrons gefordert waren. Während die Schrödingersche und die Klein-Gordonsche Theorie keinen Zug enthalten, der auch nur qualitativ auf diese Eigenschaft des Elektrons hinweist, wird der Spin von der Diracschen Theorie automatisch auch quantitativ wiedergegeben und dient dadurch als starke Stütze ihrer Richtigkeit. Auch das mit dem Spin verknüpfte magnetische Moment kommt richtig heraus. Daß die Abrundung der Theorie auch heute noch nicht ganz vollendet sein mag, zeigt ein scheinbar von der Diracschen Theorie gefordertes imaginäres Moment, das physikalisch sinnlos ist. Erst 1946 konnte R. Becker zeigen, daß es nur durch ein fehlerhaftes Näherungsverfahren bei der Lösung der Gleichungen vorgetäuscht wurde.

Die Diracsche Theorie hat mit jeder relativistischen Quantentheorie eine Schwierigkeit gemeinsam. Da der Zusammenhang zwischen kinetischer Energie E_{kin} und Impuls p in der Relativitätstheorie nicht mehr

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m},$$

sondern

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2$$

ist, gehören zum gleichen Impulsbetrag p zwei Werte der kinetischen Energie, von denen der eine (für positives Wurzelvorzeichen) positiv, der andere (für negatives Wurzelvorzeichen) negativ ist. Diese Zustände negativer Energie gestatten keine unmittelbare physikalische Deutung. (Sie entsprächen Elektronen negativer Masse). In einer klassischen Theorie ist das nicht weiter schlimm, da es dort keine Möglichkeit gibt, aus einem Zustand positiver Energie in einen solchen negativer Energie zu gelangen. Man braucht dort also nur zu fordern, daß die Welt so geschaffen wurde, daß alle Teilchen ursprünglich positive Energie hatten, dann kann sich auch in alle Zukunft nichts daran ändern.

Sowie wir aber zur Quantentheorie übergehen, treten endliche Übergangswahrscheinlichkeiten aus positiven in negative Zustände auf, zwar nicht im kräftefreien Fall, aber in jedem elektrischen Feld. Danach wäre z. B. das Elektron im Wasserstoffatom im Grundzustand nicht stabil, sondern könnte unter Emission eines Lichtquants (von über 1 MeV Energie) in einen negativen Energiezustand übergehen, es müßte dies sogar in einem Bruchteil einer Sekunde tun. Gegen diese Konsequenz hat Dirac ein sehr radikales Heilmittel angegeben. Da die Elektronen das Pauli-Prinzip befolgen, genügt die Annahme, daß alle Zustände negativer Energie besetzt sind, um alle Übergänge dorthin auszuschließen. Die notwendige Forderung, daß die Gesamtheit dieser allgegenwärtigen Elektronen unbeobachtbar bleiben soll, ist gewiß eine Härte der Theorie. Darüber hinaus läßt sich zeigen, daß es gewisse Erscheinungen gibt, bei denen sich diese „Dirac-See“ bemerkbar machen müßte. Hierbei besteht teilweise Übereinstimmung mit der Erfahrung, teilweise entstehen sehr charakteristische Widersprüche.

Um mit einem krassen Widerspruch zu beginnen: Wenn man an zwei Kondensatorplatten ein elektrisches Feld anlegt, so wird die „Dirac-See“ dadurch natürlich beeinflusst. Weißkopf hat gezeigt, daß dieser Einfluß als Polarisation des Vakuums beschrieben werden kann; er hat zur Folge, daß die Dielektrizitätskonstante des Vakuums unendlich groß wird. Dies war eine der ersten berühmten Konvergenzschwierigkeiten der heutigen Quantentheorie.

Andererseits leistet diese Vorstellung auch Erhebliches. Eine der überraschendsten Entdeckungen der dreißiger Jahre, nämlich die des Positrons, das gemeinsam mit einem Elektron durch Materialisation eines γ -Quants entstehen kann (Paarbildung, Curie und Joliot) fand hierdurch ihre Erklärung: Das γ -Quant wird in einem Vorgang, den man als Photoeffekt an einem Elektron der „Dirac-See“ bezeichnen kann, absorbiert, ein Elektron aus der „Unterwelt“ in die „Oberwelt“ gehoben. Insgesamt entsteht also ein Elektron positiver Energie, welches auch beobachtet wird, außerdem ein Loch in den besetzten negativen Zuständen. Man sieht leicht ein, daß dies Loch alle Eigenschaften eines positiv geladenen Elektrons positiver Energie besitzt, womit der Vorgang beschrieben ist (Diracsche Löchertheorie). Auch quantitativ ergibt diese Diracsche Vorstellung das Richtige; sowohl die Energiebilanz als die Wahrscheinlichkeit des Prozesses (Bethe, Heitler) sind experimentell bestätigt. Wir wissen heute, daß die Wahrscheinlichkeit für γ -Strahlen von mehr als 1 MeV – das ist die mindeste erforderliche Energie – rasch anwächst und energiereiche γ -Strahlung im wesentlichen durch diesen Prozeß absorbiert wird. Auch umgekehrt hat sich gezeigt, daß Positronen instabile Gebilde sind. Schon daß sie in der Natur normaler Weise nicht auftreten, zeigt dies deutlich. Das Experiment lehrt darüber hinaus, daß ein Positron mit einem Elektron auch wieder zerstrahlen kann, ja daß jedes Positron auf diese Weise wieder verschwindet: das Loch kommt in die Nähe des Elektrons, das Elektron fällt in das Loch unter Emission von einem oder im allgemeinen zwei Lichtquanten („Vernichtungsstrahlung“, zuerst von Joliot nachgewiesen).

2. Strahlungstheorie

In der Schrödinger-Theorie und ebenso in der Born-Heisenbergschen Matrizenformulierung der Quantenmechanik ist im allgemeinen die Rede von stationären Zuständen. Die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs zwischen zwei solchen Zuständen verschiedener Energie unter Aussendung eines Lichtquants wird mit Hilfe des Matricelements des Dipolmoments berechnet, d. h. im wesentlichen aus dem Vektor

$$r_{nm} = \int dV \psi_m^* r \psi_n ;$$

eine Begründung hierfür läßt sich aber nur durch korrespondenzmäßige Übertragung klassischer Überlegungen geben, ist also nicht in Strenge im Rahmen der Theorie enthalten. Das ist kein Wunder, weil die Schrödinger-Theorie ja lediglich die Mechanik des Elektrons zum Gegenstand hat, also eine Theorie der Materie ist, während es sich bei solchen Übergängen unter Emission von Strahlung doch eben schon um eine Fragestellung handelt, welche das Wesen der Strahlung selbst tangiert.

Das wird noch deutlicher, sobald es sich nicht um die Emission, sondern die Absorption handelt. Die Schrödinger-Theorie gibt auch hier richtige Resultate, aber sie behandelt das zu absorbierende Licht völlig im Rahmen der Maxwellschen Theorie. Eine ebene Lichtwelle vorgegebener Polarisation streicht über ein Atom hinweg. Es herrscht also am Orte des Elektrons ein Vektorpotential \mathfrak{A} , und wenn das Elektron sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, eine Wechselwirkungsenergie $-\frac{e}{c}(\mathfrak{A}v)$, wie ja die Vorschrift heißt, alle Kraftausdrücke unverändert aus der klassischen Physik zu entnehmen. Der Faktor ist in der Schrödinger-Theorie sinngemäß durch den Operator

$$\frac{p}{m} = \frac{h}{2\pi i m} \text{ grad}$$

zu ersetzen, der Faktor \mathfrak{A} bleibt als periodische Funktion von Ort und Zeit genau nach Vorschrift der Maxwellschen Theorie stehen. Die so definierte Wechselwirkung wird in die Schrödinger-Gleichung eingefügt; die zeitliche Veränderung von ψ , welche dadurch hervorgerufen wird, kann durch Lösung der Schrödinger-Gleichung berechnet werden. Sie läßt sich in Form von Übergängen aus einem stationären Anfangszustand in einen stationären Endzustand höherer Energie unter Absorption eines entsprechenden Betrages an Lichtenergie darstellen, und das ist das Interessante daran, daß diese Absorption immer den Betrag $h\nu$ aus der Lichtwelle herausnimmt. Da schließlich auch umgekehrt die Emission jedes Lichtes auf entsprechende Vorgänge zurückgeht, folgt, daß der Energieinhalt jeder Strahlungsfrequenz immer ein ganzes Vielfaches von $h\nu$ sein muß.

Auf diese Weise gelangen wir zu einer Art Vorstufe der Lichtquantenvorstellung. Es ist dies noch die gleiche Anschauung, wie sie schon Planck und Einstein begründet haben, ohne darüber hinaus zu gelangen. Sie steht auf der gleichen Erkenntnisstufe hinsichtlich des Lichtes wie die von Bohr und Sommerfeld seit 1913 entwickelte ältere Quantenmechanik hinsichtlich der Materie. Dort werden die Gesetze der klassischen Mechanik völlig unverändert übernommen, so daß das Atom als verkleinertes Abbild eines Planetensystems erscheint, dann aber werden diese Gesetze durch zusätzliche Forderungen ($\oint p dq = n \cdot h$) ergänzt, und dadurch einzelne, diskrete Bahnen als erlaubt ausgezeichnet, alle übrigen aber verboten. Ebenso wird auch hier beim Licht die klassische Maxwellsche Beschreibung übernommen, aber ergänzt durch die Vorschrift, daß nur elektromagnetische Wellen bestimmter diskreter Amplituden erlaubt sind, deren Beträge so gewählt werden müssen, daß der gesamte Energieinhalt zu einer Frequenz ν immer ein ganzes Vielfaches von $h\nu$ wird. Natürlich hat diese Aussage zunächst nur für stehende Wellen in einem Hohlraum mit spiegelnden Wänden Sinn, wie er bei den grundlegenden Betrachtungen Plancks als Ausgangspunkt dient. Während nun bei der Mechanik, also auf dem Gebiet der Theorie der Materie, mit der Schrödinger-Theorie ein Fortschritt zu einer höheren Stufe der Erkenntnis gelang, von der aus die Materie als höhere Form begriffen wird, die je nach der Art des Versuches und der Fragestellung bald korpuskular, bald wellenmäßig erscheint, geht in die Behandlung aller mit Strahlung verknüpften Prozesse das Licht noch gemäß der primitiveren Stufe ein. Es entstand so die dringende Aufgabe, auch die Strahlungstheorie neu aufzubauen, wobei der Born-Heisenbergsche Formalismus für die Materie als Richtschnur dienen konnte.

Die Quantisierung des Strahlungsfeldes knüpft an eine rein klassische Erkenntnis an, daß sich nämlich auch das Maxwellsche Strahlungsfeld auf ein Variationsprinzip zurückführen läßt, welches in enger Analogie zu dem Hamiltonschen Prinzip der Mechanik steht, so daß Begriffe wie Lagrange-Funktion, Hamilton-Funktion, generalisierte Koordinaten und Impulse dabei auftreten. Es leuchtet ein, daß eine solche formale Darstellung der klassischen Strahlungstheorie ein geeigneter Ausgangspunkt für die Quantisierung ist, da man ja dann nur noch die Vertauschungsrelationen der p_k und q_k einzuführen braucht, um das vollständige Schema der Grundgleichungen zu besitzen. Daß eine solche Darstellung möglich sein muß, läßt sich leicht einsehen. Die Maxwellsche Theorie erschien noch ihrem Begründer als eine Art Elastomechanik des Äthers. Jedenfalls

ist die klassische Elektrodynamik isomorph zu einer speziellen Mechanik der Kontinua. Dabei bedeutet Isomorphie mathematische Gleichartigkeit, also den Gebrauch der gleichen Formeln und Symbole in den beiden Theorien bei verschiedener physikalischer Ausdeutung (z. B. einmal als Vektorpotential und einmal als elastischer Verschiebungsvektor). Da nun jedes Kontinuum in Einzelatome mit Kohäsionskräften zwischen den Nachbarn aufgelöst werden kann, geht jede Mechanik der Kontinua durch Grenzübergang zu unendlich vielen Freiheitsgraden aus einer Theorie hervor, welche isomorph zur Mechanik eines Systems aus sehr vielen Massenpunkten ist. Da aber das *Hamiltonsche* Prinzip gerade für die Mechanik der Massenpunktsysteme entwickelt worden ist, muß es formal auch auf die Strahlungstheorie übertragbar bleiben.

Wir deuten an einem einfachen Beispiel die enge Analogie an, indem wir etwa den harmonischen Oszillator (ein Freiheitsgrad) und die homogene Saite (unendlich viele Freiheitsgrade) einander gegenüberstellen.

Oszillator:

$q(t)$ = Elongation

Variationsprinzip: $\delta \int L(q, \dot{q}) dt = 0$

Lagrange-Funktion: $L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2} q^2$

Zugehörige Lagrangesche Differentialgleichung:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

explizite: $m\omega^2 q + m\ddot{q} = 0$

(Newton'sche Bewegungsgleichung)

Zu q kanonisch konjugierter Impuls:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

Hamilton-Funktion:

$$H(p, q) = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

Kanonische Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned} \right\} \text{d. h. } \dot{p} = -m\omega^2 q; \quad \dot{q} = \frac{1}{m} p$$

Saite:

$\psi(x, t)$ = Elongation

Variationsprinzip: $\delta \int L dt = 0$

Lagrange-Funktion:

$$L = \int \Lambda(\psi, \dot{\psi}, \psi') dx; \quad \Lambda = \frac{\rho}{2} \dot{\psi}^2 - \frac{S}{2} \psi'^2 \quad \left(\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

Zugehörige Feldgleichung:

$$-\frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi'} = 0$$

explizite:

$$\rho \ddot{\psi} - S \psi'' = 0$$

(Wellengleichung)

Zu ψ kanonisch konjugierte Funktion:

$$\pi = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\psi}} = \rho \dot{\psi}$$

Hamilton-Funktion:

$$H = \int X(\pi, \psi, \psi') dx; \quad X = \pi \dot{\psi} - \Lambda = \frac{1}{2\rho} \pi^2 + \frac{S}{2} \psi'^2$$

Kanonische Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\pi} &= -\frac{\partial X}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial \psi'} \right) \\ \dot{\psi} &= \frac{\partial X}{\partial \pi} \end{aligned} \right\} \text{d. h. } \dot{\pi} = S \psi'; \quad \dot{\psi} = \frac{1}{\rho} \pi$$

Soweit geht die klassische Beschreibung, die offenbar in beiden Fällen völlig parallel läuft. Die Behandlung nach der Quantenmechanik knüpft an die Größen p und q beim Oszillator an, in der Form der Vertauschungsrelation¹⁾ $p q - q p = \frac{h}{i}$. Die kanonischen Gleichungen lassen sich dann schreiben $\frac{h}{i} p = H p - p H$ und $\frac{h}{i} q = H q - q H$, von wo die *Born-Heisenbergsche* Behandlung des Oszillators ausgeht. Für die Quantisierung der schwingenden Saite muß man bei analoger Behandlung die Funktionen π und ψ zu Grunde legen.

¹⁾ Wir benutzen in diesem Abschnitt im folgenden die Abkürzung \hbar für $\frac{h}{2\pi}$. Anstelle des Planckschen Ausdrucks $h\nu$ tritt dann im folgenden stets $\hbar\omega$, wobei $\omega = 2\pi\nu$ auch kurz als Frequenz bezeichnet wird.

Denkt man sich die Saite in eine Perlenschnur einer großen, aber endlichen Zahl von Massenpunkten ($n = 1, 2, \dots, N$) zerlegt, so sollten die Vertauschungsrelationen bestehen

$$p_n q_m - q_m p_n = \frac{h}{i} \delta_{nm} \quad (\delta_{nm} = 0 \text{ für } n \neq m, \delta_{nm} = 1 \text{ für } n = m).$$

Der Übergang zum Kontinuum führt auf

$$\pi(x) \psi(x') - \psi(x') \pi(x) = \frac{h}{i} \delta(x - x'),$$

wobei $\delta(x - x') = 0$ für $x \neq x'$, und derart unendlich für $x = x'$, daß $\int \delta(x - x') dx' = 1$ wird.

Es läßt sich leicht zeigen, daß dann die kanonischen Gleichungen

$$\frac{h}{i} \dot{\pi} = H \pi - \pi H; \quad \frac{h}{i} \dot{\psi} = H \psi - \psi H$$

lauten, womit auch hier der Ausgangspunkt gewonnen ist.

Die vorstehende Gegenüberstellung enthält noch keine Bemerkung darüber, wie die Lösung der Differentialgleichung aufgebaut ist. Nun wissen wir, daß eine bei $x = 0$ und $x = l$ festgehaltene Saite nicht in jeder Form schwingen kann, sondern daß die Elongation $\psi(x, t)$ in Form einer *Fourier-Reihe* aus Grundschwingung und Oberschwingungen zusammengesetzt werden kann:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_n Q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Die Bezeichnung der *Fourier-Koeffizienten* mit $\sqrt{2/l} Q_n$ gestattet nachher, diese Q_n weitgehend in Parallele zu den Koordinaten der Oszillatortheorie zu setzen; deshalb wählen wir diese Schreibweise. Genau so schreiben wir

$$\pi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_n P_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Die *Fourier-Koeffizienten* berechnen sich dann nach dem bekannten Umkehrtheorem von *Fourier* zu

$$Q_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx; \quad P_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \pi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Die oben abgeleitete *Hamilton-Funktion*, also die Schwingungsenergie der Saite

$$H = \int_0^l dx \left\{ \frac{1}{2\rho} \pi^2 + \frac{S}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

ergibt sich mit der Abkürzung

$$\omega_n = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \frac{n\pi}{l}$$

in der Form

$$H = \sum_n \left(\frac{1}{2\rho} P_n^2 + \frac{\rho \omega_n^2}{2} Q_n^2 \right).$$

sie läßt sich also in eine Summe

$$H = \sum_n H_n$$

einzelner, jeweils durch ein Paar P_n, Q_n von *Fourier-Koeffizienten* charakterisierter Funktionen H_n zerlegen. Das bedeutet physikalisch, daß eine Saite gleichzeitig nach der n -ten und nach der m -ten Oberwelle schwingen kann, ohne daß beide Schwingungen sich gegenseitig stören. Die zeitliche Abhängigkeit der $P_n(t), Q_n(t)$ als periodische Funktionen mit der Frequenz ω_n folgt aus den kanonischen Gleichungen und soll hier unterdrückt werden. Soweit geht der Geltungsbereich der klassischen Theorie.

Führen wir jetzt die oben angegebenen Vertauschungsrelationen der Quantentheorie ein:

$$\pi(x) \psi(x') - \psi(x') \pi(x) = \frac{h}{i} \delta(x - x'),$$

so folgt

$$\begin{aligned} P_n Q_m - Q_m P_n &= \frac{2}{i} \int_0^l dx \int_0^l dx' [\pi(x) \psi(x') - \psi(x') \pi(x)] \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x'}{l} \\ &= \frac{2}{i} \int_0^l dx \int_0^l dx' \frac{h}{i} \delta(x - x') \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x'}{l} \\ &= \frac{2}{i} \frac{h}{i} \int_0^l dx \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} = \frac{h}{i} \delta_{nm}, \end{aligned}$$

also gerade die gleichen „kanonischen“ Vertauschungsrelationen wie in der Quantenmechanik der Massenpunktsysteme zwischen Koordinaten q_m und konjugierten Impulskomponenten p_n .

Wir führen nun zwei Hilfsgrößen ein:

$$c_n = \frac{1}{2\hbar\omega_n} (\rho\omega_n Q_n + i P_n); \quad c_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_n}} (\rho\omega_n Q_n - i P_n);$$

dann ergeben sie durch eine einfache Umrechnung für die c_n, c_n^\dagger folgende Vertauschungsrelationen

$$c_n c_m - c_m c_n = 0, \quad c_n^\dagger c_m^\dagger - c_m^\dagger c_n^\dagger = 0, \quad c_n c_m^\dagger - c_m^\dagger c_n = \delta_{nm}$$

und die *Hamilton-Funktion* geht über in

$$H = \sum_n H_n, \quad H_n = \frac{\hbar \omega_n}{2} (c_n c_n^\dagger + c_n^\dagger c_n).$$

Weder *Hamilton-Funktion* noch *Vertauschungsrelationen* führen zu einer Verkopplung verschiedener Indices mit einander; wir können daher einen Index (n), d. h. eine harmonische Schwingung der Saite für sich betrachten wie in der klassischen Mechanik. Die beiden ersten *Vertauschungsrelationen* werden dann (für $m = n$) trivial; es bleibt im Ganzen übrig:

$$c_n c_n^\dagger - c_n^\dagger c_n = 1$$

$$c_n c_n^\dagger + c_n^\dagger c_n = Z_n, \quad Z_n = 2 H_n / (\hbar \omega_n),$$

wobei wir die Zahl Z_n als Maß für die Energie der n -ten Oberschwingung etwa aus der Erfahrung entnehmen können.

Die beiden letzten Gleichungen sind die einfachste Formulierung des Unterschiedes zwischen klassischer und Quantentheorie; alle formalen Überlegungen, die wir hier angestellt haben, lassen sich Wort für Wort genau so auch in der klassischen Mechanik durchführen mit Ausnahme der *Vertauschungsrelationen*. Infolge dieser Nichtvertauschbarkeit von c_n mit c_n^\dagger können jetzt aber beide Größen nicht mehr zwei gewöhnliche Zahlen sein; an ihre Stelle treten Operatoren oder Matrizen, und die Aufgabe besteht jetzt darin, die Eigenwerte dieser Operatoren aufzusuchen.

Soll die Energie H_n , welche zur Schwingung der Frequenz ω_n gehört (bis auf die Nullpunktsenergie $\frac{1}{2} \hbar \omega_n$, welche begrifflich schwierig ist) ein ganzes Vielfaches (N_n) von $\hbar \omega_n$ sein, so kann N_n als Anzahl der „Schwingsungsquanten“ der Frequenz ω_n gedeutet werden. Dann muß $Z_n = 2 N_n + 1$ eine ungerade Zahl werden. Die Operatoren c_n, c_n^\dagger müssen nun auf irgend-etwas wirken; offenbar muß dieses „irgend-etwas“ eine Funktion der Besetzungszahlen N_n der verschiedenen Zustände sein: $\chi(N_1, N_2, \dots, N_n, \dots)$, und die Operatoren haben die Eigenschaft, diese Funktion zu verändern. Tatsächlich läßt sich das gewünschte Ergebnis erhalten, wenn man ansetzt²⁾

$$c_n \chi(N_n) = e^{-i \omega_n t} | N_n + 1 \rangle \chi(N_n + 1)$$

$$c_n^\dagger \chi(N_n) = e^{+i \omega_n t} | N_n \rangle \chi(N_n - 1);$$

dann wird durch Anwendung von c_n die Zahl der Schwingungsquanten im Zustande n um eins erhöht, durch Anwendung von c_n^\dagger um eins erniedrigt. Der Ansatz führt daher zu den Beziehungen:

$$c_n c_n^\dagger \chi(N_n) = c_n [e^{-i \omega_n t} | N_n \rangle \chi(N_n - 1)] = | N_n + 1 \rangle [| N_n + 1 \rangle \chi(N_n)] = (N_n + 1) \cdot \chi(N_n)$$

$$c_n^\dagger c_n \chi(N_n) = c_n^\dagger [e^{+i \omega_n t} | N_n + 1 \rangle \chi(N_n + 1)] = | N_n \rangle [| N_n \rangle \chi(N_n)] = N_n \cdot \chi(N_n),$$

woraus man sofort die *Vertauschungsrelationen* und den *Energieausdruck* erhält.

Wir merken endlich noch an, daß die Funktion $\psi(x, t)$ sich in den Operatoren c_n, c_n^\dagger linear ausdrücken läßt:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \sum_n \sin \frac{n \pi x}{l} \left[\frac{\hbar}{2 \omega_n} (c_n + c_n^\dagger) \right];$$

sie ist selbst ein Operator, welcher auf die Teilchenzahlen N_n wirkt.

Die Strahlung läßt sich nun fast wörtlich nach vorstehendem Gedankengang behandeln. Anstelle der Länge der Saite tritt das endliche Volumen eines abgeschlossenen Hohlraumes, wie ja schon *Kirchhoff* und *Planck* die „Hohlraumstrahlung“ eingeführt haben, welche nur stehende Lichtwellen zwischen spiegelnden Wänden enthält. Die Theorie muß also von einer Koordinate x auf die drei Raumdimensionen erweitert werden; auch sonst treten kleine Erweiterungen auf, welche zusammenhängen mit der Möglichkeit verschiedener Polarisationsrichtungen der Lichtwellen. Am Gesamtschema ändert sich nichts. Gerade für die Lichtquanten ist aber aus der experimentellen Erfahrung bekannt, was bei der schwingenden Saite nur eine analog dazu gebildete Hypothese war. Wollen wir die Sprache der Lichtquanten

²⁾ Die Zeitabhängigkeit von c_n, c_n^\dagger folgt aus den kanonischen Gleichungen durch eine einfache, aber etwas mühsame Rechnung.

als mögliche Ausdrucksform zulassen, so muß zu jeder Welle vorgegebener Frequenz ω_n eine ganze Zahl N_n von Lichtquanten gehören, deren jedes die Energie $\hbar \omega_n$ hat. Die Operatoren c_n, c_n^\dagger werden daher auch in der Strahlungstheorie auftauchen.

In der *Lagrange-Funktion* der Strahlung treten nun an Stelle der Elongation ψ der schwingenden Saite zunächst vier Funktionen von Ort und Zeit auf, nämlich die vier Potentiale der *Maxwell'schen Theorie*, an Stelle von π entsprechend ihre kanonisch-konjugierten. Da zwischen den Potentialen eine Beziehung besteht (die *Lorentz-Konvention*), kommt man mit drei Komponenten aus, nämlich den drei Komponenten des Vektorpotentials \mathfrak{A} und erhält auch nur drei konjugierte Funktionen, nämlich die Komponenten der elektrischen Feldstärke. Zwischen beiden Größen bestehen jetzt *Vertauschungsrelationen*; d. h. eben, daß die Wellenamplituden nicht mehr durch gewöhnliche Zahlen ausgedrückt werden können. Das klassische Wellenbild beschreibt eben nicht mehr vollständig den Sachverhalt. Will man sich möglichst weitgehend im Wellenbild bewegen, so muß man wenigstens für die Amplituden Operatoren einführen und damit unanschauliche Züge in das Gesamtwellenbild hineinbringen, wie es umgekehrt von der Korpuskelseite herkommend die Forderung nach Existenz einer Wellengleichung ebenfalls tut. Durch diese Änderung eben wird die Energie jeder Welle auf bestimmte, diskrete Werte festgelegt und damit der Weg zur korpuskularen Vorstellung freigegeben.

Daß die in der Amplitude, d. h. also im Vektorpotential linear auftretenden Operatoren c_n und c_n^\dagger gerade die Eigenschaft haben, die Besetzungszahl des n -ten Zustandes um eine Einheit zu erhöhen und zu erniedrigen, erweist sich als entscheidend wichtig für die Behandlung der Wechselwirkung von Strahlung und Materie, also die eigentliche Aufgabe der vorstehend begründeten Strahlungstheorie. Die Wechselwirkungsenergie zwischen einem Elektron der Geschwindigkeit b und der Strahlung ist ja eben $-\frac{e}{c} (\mathfrak{A}b)$, d. h. linear in den Komponenten des Vektorpotentials; hier treten die Operatoren c_n und c_n^\dagger also linear in Erscheinung, so daß in dem Augenblick, wo derartige Glieder in der Hamiltonfunktion des Gesamtsystems aus Strahlung und Materie als Wechselwirkungsterme auftreten, die Zahl der Lichtquanten nicht mehr konstant bleibt, sondern sich bestimmte, systematisch zu berechnende Wahrscheinlichkeiten für die Erzeugung bzw. Absorption eines Lichtquants im Zusammenhang mit diesem Wechselwirkungsgliede ergeben. Man bezeichnet daher c_n als „teilchenerzeugenden“ und c_n^\dagger als „teilchenvernichtenden“ Operator; der Erhaltungssatz der Teilchenzahl ist aufgehoben, sowie derartige lineare Ausdrücke im Energieoperator auftreten, wie denn auch für die Anzahl der Lichtquanten kein Erhaltungssatz mehr gilt, sowie eine Kopplung zwischen dem Strahlungsfeld und der Materie eintritt.

Die vorstehend skizzierte Strahlungstheorie enthält bereits die sehr viel allgemeinere Aussage, daß die Komponenten des Vektorpotentials und der elektrischen Feldstärke zu einander kanonisch konjugierte Größen sind; zwischen ihnen sollen die üblichen *Vertauschungsrelationen* bestehen. Damit ist zugleich die Basis zu einer allgemeinen Quantenelektrodynamik gewonnen, wie sie sich im Anschluß an die Strahlungstheorie entwickelt hat. Die praktische Bedeutung dieser Quantenelektrodynamik ist zwar bis heute gering geblieben und erst neuerdings hat eine in der Feinstruktur der Wasserstoffterme aufgefundene geringe Unstimmigkeit, die wir bereits oben bei der *Dirac-Theorie* erwähnten, sich als experimentell prüfbare Konsequenz einiger einfacher Grundgedanken der Quantenelektrodynamik erwiesen. Für die begriffliche Entwicklung der Quantentheorie war es freilich von großer Tragweite, daß ein folgerichtiger Weg gezeigt werden konnte, um die *Maxwell'sche Theorie* als Feldtheorie $\psi(x, y, z, t)$ in die Quantensprache zu übersetzen. Der Fortentwicklung dieser Gedankengänge werden wir weiter unten bei der Theorie des Mesonfeldes daher wieder begegnen.

3. Quantenstatistik

Die klassische Thermodynamik, zu einem erheblichen Teile ihrer heute vorliegenden, in sich geschlossenen Form das Werk *Max Plancks*, läßt sich bekanntlich aus statistischen Grundlagen ableiten infolge des Zusammenhanges von Entropie S und stati-

stischer Wahrscheinlichkeit W eines Zustandes: $S = k \ln W$. Da W als Zahl der möglichen verschiedenen Realisierungen des gleichen Makrozustandes durch verschiedene Mikrozustände definiert ist, in der klassischen Theorie aber die Zustände ein Kontinuum bilden, blieb hier eine begriffliche Unklarheit. Die Zahl der Zustände in einem Kontinuum von Zuständen hat offenbar keinen exakten Sinn und bedarf einer besonderen Definition. Diese Definition wurde dadurch gegeben, daß der gesamte „Phasenraum“, der aus allen Koordinaten q_k und Impulskomponenten p_k gebildet wird (der für ein Gas aus N Atomen also z. B. $6N$ Achsen hat) in „Zellen“ gleicher Größe τ eingeteilt wurde, deren Form beliebig sein dürfte; dann sollte jeder Zelle ein Zustand zugeordnet werden.

Hinsichtlich der Zellengröße τ konnte die klassische Theorie keine Aussage machen; streng genommen hätte man sogar $\tau \rightarrow 0$ gehen lassen müssen; doch gab es zunächst keine experimentelle Erfahrung, in welche die Größe von τ eingegangen wäre. Je kleiner τ gewählt wurde, um so dichter lagen offenbar die Mikrozustände, um so größer mußte also die statistische Wahrscheinlichkeit eines Makrozustandes werden. Die unbestimmte Größe von τ spiegelte sich daher in einer willkürlichen additiven Konstante in der Entropie. Die Erfahrungen über chemische Reaktionsgleichgewichte (Bestimmung der chemischen Konstante) und über den Gang der spezifischen Wärme bei tiefen Temperaturen wurden dann von *Nernst* in dem Satze zusammengefaßt, daß die Entropie am absoluten Temperaturnullpunkt gegen Null gehen müsse. Dieser Satz stand zunächst als ein Zusatzpostulat neben der klassischen Thermodynamik, ohne als wesentliches Glied darin eingebaut zu sein. Er zog eine unmittelbare Konsequenz für die Größe τ der Elementarzellen im Phasenraum nach sich: Es ergab sich $\tau = h^{6N}$ in Übereinstimmung mit der Zahl der Zustände, die im Rahmen der *Bohr-Sommerfeld-Planckschen* Form der Quantentheorie aus der Forderung $\oint p_k dq_k = n_k h$ berechnet wurde. Damit war die größte begriffliche Schwierigkeit der Statistik überwunden und eine Quantenstatistik begründet, welche infolge ihrer klaren Trennung diskreter Zustände konsequenter und einfacher geworden ist und die berechtigten Zweifel zerstreuen konnte, welche der klassischen Statistik entgegengestanden hatten.

Auch die Entwicklung nach 1926 hat zu der so gewonnenen Erkenntnis nichts wesentliches mehr hinzugefügt, wenn auch mancher Zug (etwa der Begriff der Nullpunktsenergie) im Rahmen der *Schrödinger*-Theorie klarer und selbstverständlicher zutage trat. Ein wesentlicher Schritt erfolgte um diese Zeit jedoch noch an einer anderen Stelle. Wir sagten oben, die statistische Wahrscheinlichkeit gebe die Zahl der möglichen verschiedenen Realisierungen des gleichen Makrozustandes an; hinsichtlich der Frage, was verschiedene Zustände seien, wurde zuerst eine Kritik notwendig; bald darauf wurde erneut die Frage aufgeworfen, ob alle in der älteren Theorie angegebenen Zustände möglich seien.

Die auf *Bose* und *Einstein* (1924) zurückgehende Kritik an der Ansicht, welche Zustände verschieden seien, läßt sich kurz ausdrücken als das Prinzip von der Ununterscheidbarkeit gleichartiger Elementarteilchen. Ob das Atom 1 im Zustande mit der Eigenfunktion u und das Atom 2 mit der Eigenfunktion v ist oder umgekehrt, ob also die Koordinaten dieser Teilchen in die Gesamteigenfunktion des ganzen Systems in der Form $u(r_1) v(r_2)$ oder $v(r_1) u(r_2)$ eingehen, kann nicht unterschieden werden. Während die ältere Theorie beide Zustände als verschieden zählte, gelten sie in der *Bose-Einsteinschen* Statistik als ein und derselbe Zustand bei der Abzählung der möglichen Zustände. Dieser allgemeine Zug ist nicht nur auf materielle Teilchen beschränkt, sondern gilt natürlich für alle atomaren Systeme, mit denen man Statistik treibt. Seine Anwendung auf Lichtquanten führt z. B. mühelos zur *Planckschen* Strahlungsformel, wenn man *Plancks* Grundgedanken hineinsteckt, jedem Lichtquant der Frequenz ν die Energie $h\nu$ zuzuordnen.

Wir haben hier bereits die *Schrödingersche* Sprache der Eigenfunktionen gewählt; in dieser Sprache erscheint das *Bose-Einsteinsche* Prinzip mathematisch unter dem Gesichtspunkt der Entartung der Eigenfunktionen: $u(1) v(2)$ und $v(1) u(2)$ sind beides Lösungen der *Schrödinger*-Gleichung zum selben Energie-Eigenwert. Auch jede Linearkombination ist eine Lösung:

$$\psi(1,2) = \alpha \cdot u(1)v(2) + \beta \cdot v(1)u(2);$$

beide Lösungen sind daher mit einander entartet. Handelt es sich um mehr als zwei Teilchen – wie stets in der Statistik – so existieren noch sehr viel mehr derart mit einander entartete Lö-

sungen. Man kann nun einen vollständigen Satz von Lösungen aufsuchen, aus dem sich durch Linearkombination mit irgendwelchen Zahlenfaktoren α, β, \dots die allgemeinste Lösung zu der betreffenden Energie angeben läßt. Bei zwei Teilchen besteht ein solcher vollständiger Satz eben aus den beiden Lösungen $u(1)v(2)$ und $v(1)u(2)$; statt dessen kann man aber auch die Kombination

$$u(1)v(2) + v(1)u(2) \text{ und } u(1)v(2) - v(1)u(2)$$

zugrundelegen, von denen die eine symmetrisch, die andere antisymmetrisch gegen eine Vertauschung der beiden Teilchen ist. Bei mehr als zwei Teilchen treten noch kompliziertere „Symmetriecharaktere“ auf; es ist eine aus der Gruppentheorie bekannte Aufgabe, die mit einander entarteten Lösungen nach Symmetriecharakteren auszureduzieren und auf diese Weise einen vollständigen Satz von Lösungen anzugeben. An dieser Stelle sehen wir die Gruppentheorie in die Quantenphysik eindringen, die denn auch folgerichtig in den Jahren um 1930 herum das Feld beherrscht hat, als die Atome und Molekeln mit mehreren Elektronen untersucht wurden. Für die Theorie der chemischen Bindung z. B. sind diese Betrachtungen fundamental. Das Ergebnis, welches sich bei solchen Systemen, angefangen von den einfachen Fällen des Heliumatoms und der Unterscheidung von Para- und Orthowasserstoff bis zu so komplizierten Fällen wie dem Benzolring hundertfach bewährt hat, läßt sich im *Pauli*-Prinzip kurz zusammenfassen: Man beschreibe jedes Teilchen vollständig durch seine sämtlichen Freiheitsgrade (Koordinaten und Spin); dann sind nur solche Eigenfunktionen in der Natur als stationäre Zustände realisierbar, die gegen eine Vertauschung zweier beliebiger der darin enthaltenen Teilchen antisymmetrisch sind, d. h. bei der Vertauschung ihr Vorzeichen ändern. Das *Pauli*-Prinzip gilt erfahrungsgemäß für Elektronen, Protonen, Neutronen und wahrscheinlich für Neutrinos; es gilt nicht für Lichtquanten und (wahrscheinlich) Mesonen, bei welchen gerade die symmetrischen Eigenfunktionen allein auftreten.

Die Antisymmetrie hat eine wichtige Folge: Es können niemals zwei dem *Pauli*-Prinzip genügende gleichartige Teilchen im selben Quantenzustand sein. Wird etwa in unserem obigen Beispiel $v = u$, so verschwindet die antisymmetrische Kombination, während für die symmetrische keine solche Einschränkung besteht. Eben deshalb fällt ja z. B. der tiefste Term des Orthohelium aus. Bei vielen Teilchen, wie sie in der Statistik auftreten, wird sich daher infolge des *Pauli*-Prinzips auch eine wesentliche Einschränkung der möglichen Zustände ergeben; die hierdurch modifizierte Statistik pflegt man als *Fermi*-Statistik (1926) zu bezeichnen. Sie ist bei tiefen Temperaturen durch eine bedeutend größere Nullpunktsenergie charakterisiert als die *Bose*-Statistik, welche diese Einschränkung nicht kennt und für symmetrische Eigenfunktionen zutrifft. Während sich bei der *Bose*-Statistik alle Teilchen (z. B. Lichtquanten) im tiefsten Quantenzustand befinden können, ist bei der *Fermi*-Statistik (z. B. Elektronen) nur eines in diesem Zustand, jedes weitere in einem anderen Zustande. So wird eine Reihe von Zuständen besetzt unter denen sich mit wachsender Teilchenzahl immer mehr solche, von höherer Energie befinden, so daß die Gesamtenergie größer wird. Dies gilt bei „tiefen“ Temperaturen. Mit steigender Temperatur werden in beiden Fällen immer mehr Teilchen in die freien Zustände hoher Energie übergehen, so daß sich asymptotisch in beiden Fällen das gleiche Bild bietet. In einem gewöhnlichen Gas bei Zimmertemperatur ist dies asymptotische Verhalten längst erreicht. Die bei tiefen Temperaturen zu erwartende „Entartung“ des Gases wird verdeckt durch die vorher einsetzende Kondensation. Handelt es sich aber um sehr leichte Teilchen, so rückt die Grenztemperatur in die Höhe. Schon beim Wasserstoff sind daher noch bei Temperaturen von der Größenordnung der flüssigen Luft sehr spürbare Abweichungen in der spezifischen Wärme zu merken; bei einem Gas von Elektronen hat man noch weit größere Chancen, die Entartung zu beobachten.

Solche Elektronengase kommen nun zum Glück an zwei Stellen in der Natur vor. Erstens weiß man seit *Drude*, daß die elektrische Leitfähigkeit der Metalle erklärt werden kann, wenn man sich im Metall je Atom etwa ein Elektron als von dem speziellen Atom abgelöst, dem Metall als Ganzem zugeordnet

und einigermaßen frei darin beweglich vorstellt. Diese sogenannten Leitungselektronen bilden dann ein Elektronengas. Die *Drudische* Idee, welche sich zum Verständnis der Leitungsphänomene (elektrische und thermische Leitfähigkeit, *Wiedemann-Franz*sches Gesetz, thermoelektrische Effekte, *Hall-Effekt*) vorzüglich bewährte, hatte zunächst, die Konsequenz, daß die Leitungselektronen merkbar zur spezifischen Wärme des Metalls beitragen sollten, was im Widerspruch zur Erfahrung stand. Diese Diskrepanz klärte *Sommerfeld* 1928 auf, indem er die *Fermi-Statistik* auf das Elektronengas anwandte; in der Tat läßt sich zeigen, daß die Grenztemperatur unterhalb deren mit Entartung zu rechnen ist, bei der in den Metallen herrschenden Dichte der Leitungselektronen bei mehreren tausend Grad liegt.

Ein Elektronengas liegt zweitens auch im Innern der Sterne vor, wo infolge der sehr hohen Temperaturen (10 bis 100 Millionen Grad) die Atome weitgehend ionisiert sind. Bei den geringen Dichten normaler Sterne liegt freilich die Entartungstemperatur nicht so hoch, so daß sich hier die Quantenstatistik noch nicht bemerkbar macht. Das Bild ändert sich bei den extrem hohen Dichten der weißen Zwerge (10^5 bis 10^6 g/cm³); hier haben wir es selbst bei 10^9 Grad noch mit einer fast vollständigen Entartung zu tun; eben damit hängt es zusammen, daß es überhaupt möglich ist, unter extremen Bedingungen die Materie soweit zusammenzudrücken, daß solche hohen Dichten auftreten (*Fowler* 1926).

4. Quantentheorie und Kernphysik

Die ersten kernphysikalischen Kenntnisse schienen völlig im Widerspruch zur Quantentheorie zu stehen. Durch zwei wichtige neue Ideen wurde im ganzen Übereinstimmung erzielt: die Entdeckung des Neutrons (*Chadwick* 1932) und die Erfindung des Neutrinos (*Pauli* 1933). Durch die Entdeckung des Neutrons wurde geklärt, daß die Kerne aus Protonen und Neutronen etwa symmetrisch aufgebaut sind (*Heisenberg* und *Majorana* 1932); insbesondere nehmen keine Elektronen an diesem Aufbau teil. Die schweren Neutronen und Protonen – als Kernbausteine mit dem gemeinsamen Namen „Nukleonen“ genannt – haben vermöge ihrer größeren Masse bei Beschränkung auf den Raum eines Atomkerns eine viel kleinere Nullpunktsenergie und erst recht eine kleinere Geschwindigkeit als die leichten Elektronen; deshalb kann in brauchbarer Näherung auf den Aufbau der Kerne die unrelativistische Quantenmechanik angewandt werden. Hieraus erwuchs ein gewaltiges Programm: Hatte man bei der Atomhülle über die wirksamen Kräfte elektrischen Ursprungs völlig Bescheid gewußt, aber aus den völlig unklassischen Erscheinungen eine neue Kinematik, eben diejenige der Quantenmechanik erschließen müssen, so lag umgekehrt für das Verständnis der Atomkerne der kinematische Rahmen der Quantenmechanik bereits vor, über die völlig neuartigen Kräfte hingegen wußte man noch nichts. Die Erschließung dieser nuklearen Kräfte war also die zentrale Aufgabe; sie konnte durch quantentheoretische Analyse der experimentellen Erfahrungen über Bindungsenergien, Anregungsenergien, Wirkungsquerschnitte, Streuverteilungen sehr weit getrieben werden, hat aber bis heute nicht zu einem Kraftgesetz von ähnlich überzeugender Einfachheit geführt wie etwa das *Coulombsche* Gesetz im Bereich der Elektrostatik.

Die Erfindung des Neutrinos brachte den ganzen Problemkreis um den radioaktiven β -Zerfall in Ordnung, wo bisher alle Erhaltungssätze der Physik zu versagen schienen. Nun übernahm das Neutrino das Defizit an Energie, Impuls und Drehimpuls, so daß auch auf den β -Zerfall die Methoden der bisherigen Physik anwendbar wurden. Der β -Zerfall selbst trat hierdurch in enge Analogie zum Emissionsvorgang eines Lichtquants und seine Theorie infolgedessen zur Strahlungstheorie (*Fermi* 1934). So nämlich, wie die Veränderungen im Zustand der Elektronen eines Atoms mit der Erzeugung eines Lichtquants verknüpft sein können, kann die Folge einer Änderung im Zustand der Nukleonen eines Kernes die Erzeugung eines Elektrons und (in unvollständiger Analogie) außerdem im gleichen Prozeß eines Neutrinos sein, d. h. also zweier „leichter“ Teilchen, „Leptonen“ im Gegensatz zu den „schweren“, den Nukleonen). Die Analogie zur Strahlungstheorie wurde noch enger, als *Yukawa* (1935) vor-

schlug, den β -Zerfall als Übergang zweiter Ordnung begrifflich in zwei Schritte zu zerlegen: die Erzeugung eines einzigen Teilchens, heute Meson genannt, in völliger Analogie zur Erzeugung eines Lichtquants in der Strahlungstheorie, welches instabil ist und anschließend sofort spontan in Elektron und Neutrino zerfällt.

Welche dieser Vorstellungen man auch immer zugrundelegen will, auf jeden Fall werden dabei materielle Teilchen erzeugt, die vorher nicht da waren, d. h. der Erhaltungssatz der Materie wird hierbei vollständig aufgelöst. Dies ist etwas anderes als die Bildung eines Elektron-Positron-Paares durch ein hartes Lichtquant, die von der *Diracschen* Löchertheorie als Photoeffekt an einem Elektron der „Unterwelt“ erklärt wird (s. o.). Beim β -Zerfall wird das Elektron nicht in dieser oder ähnlicher Weise als präexistent angesehen, sondern es existiert eben überhaupt noch nicht und wird erst beim β -Zerfall erschaffen, natürlich unter Wahrung der allgemeinen Erhaltungssätze der Physik für Masse, Energie, Ladung usw. Wenn dem aber so ist, dann entsteht die begriffliche Notwendigkeit, eine analoge Beschreibung wie für die Lichtquanten in der Strahlungstheorie auch auf Elektronen und Neutrinos oder Mesonen auszudehnen. Hierbei tritt ein Unterschied infolge der Ladung und Ruhmasse der Elektronen oder Mesonen auf, beides Eigenschaften, die das Lichtquant nicht hat. Dieser Unterschied ist aber durch relativ geringfügige Erweiterungen des Formalismus zu bewältigen, was hinsichtlich der Ruhmasse weiter unten vorgeführt werden soll. Ein weiterer Unterschied besteht darin, daß die Elektronen (und Neutrinos) dem *Pauli-Prinzip* und der *Fermi-Statistik* genügen, die Lichtquanten aber der *Bose-Statistik*. Das bedeutet, daß zwar beliebig viele Lichtquanten auf derselben „Welle sitzen“ können, nicht aber beliebig viele Elektronen. Die für Elektronenwellen analog zu den Operatoren c_n, c_n^\dagger der Strahlungstheorie gebildeten Größen müssen daher andere Eigenwerte besitzen. Diese Frage hatten sich *Jordan* und *Wigner* (1927) schon gleich nach Entstehung der Strahlungstheorie vorgelegt und dahin beantwortet, daß die *Fermi-Statistik* die Gültigkeit etwas modifizierter Vertauschungsrelationen (mit Pluszeichen statt Minuszeichen) erfordert. Wenn freilich, wie es scheint, die *Yukawasche* Vorstellung zu recht besteht, daß sich zuerst Mesonen bilden, ist diese Betrachtung an dieser Stelle unwesentlich, da die Mesonen der *Bose-Statistik* genügen müssen wie die Lichtquanten.

Dieser ganze Komplex von Erkenntnissen hat nun insofern einen sehr fruchtbaren Einfluß auf die Weiterentwicklung der Quantentheorie gehabt, als der feldtheoretische Gesichtspunkt beim Aufbau der Materie in einem Maße in den Vordergrund gerückt ist, wie man es 1926 kaum erwarten konnte. Am Beispiel einer gegenüber der *Yukawaschen* vereinfachten, aber begrifflich ganz ähnlichen Modelltheorie sei dies im folgenden kurz erläutert.

Die *Maxwellsche* Elektrostatik geht im Prinzip etwa folgendermaßen vor: Sie setzt zunächst eine Funktion ρ des Ortes als bekannt voraus, welche Ladungsdichte heißt, und als Quellverteilung für eine Feldfunktion, das Potential ψ dient, welches aus der *Poissonschen* Differentialgleichung

$$\Delta\psi = -4\pi\rho$$

berechnet wird. Aus ρ und ψ setzt man das Raumintegral

$$E = \frac{1}{2} \int \psi \rho \, dV$$

zusammen, welches die gesamte Feldenergie bedeutet. Hat man etwa zwei Punktladungen e_1 und e_2 an den Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 , so ist

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = e_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + e_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$$

und die Lösung der Differentialgleichung

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{e_1}{r - r_1} + \frac{e_2}{r - r_2}$$

Die gesamte Feldenergie läßt sich dann in drei Summanden zerlegen:

$$E = E_{11} + E_{22} + W$$

mit

$$E_{11} = \frac{1}{2} \int \psi_1 \rho_1 \, dV \quad \text{und} \quad E_{22} = \frac{1}{2} \int \psi_2 \rho_2 \, dV,$$

die man als „Selbstenergie“ der beiden Ladungen bezeichnet und die für Punktladungen unendlich groß werden, und

$$W = \frac{1}{2} \int dV (\psi_1 \varrho_1 + \psi_2 \varrho_2) = \frac{e_1 e_2}{r_{12}},$$

die Wechselwirkungsenergie, welche in der Tat mit dem elementaren Ausdruck des *Coulombschen* Gesetzes übereinstimmt. (Man erhält die *Coulombsche* Kraft zwischen den beiden Ladungen in bekannter Weise durch Differenzieren dieser potentiellen Energie nach dem gegenseitigen Abstand).

Bedenkt man, daß auch bei nichtstatischen Problemen im Rahmen der *Maxwellschen* Theorie im Prinzip dieser Gedankengang erhalten bleibt, nur daß an Stelle der *Poissonschen* Differentialgleichung jetzt

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi \varrho$$

tritt, also eine Gleichung, die auch für $\rho = 0$ durch alle möglichen Lichtwellen befriedigt wird, dann sieht man den Zusammenhang mit der Lichtquantentheorie: Betrachtet man die Funktion ψ jetzt in der Art, wie es in der Strahlungstheorie gezeigt wurde und unterwirft sie den bekannten Quantisierungsvorschriften, so erhält man an Stelle der Lichtwellen Lichtquanten. Für die vollständige Durchführung der Optik muß man natürlich neben ψ vor allem das Vektorpotential \mathbf{A} , neben der Ladungsdichte die Ströme berücksichtigen, am Prinzip der Überlegungen ändert sich dadurch aber nichts.

Ganz analog hierzu hat *Yukawa* die Feldtheorie der Kernkräfte aufgebaut. Das Feld wird durch „Ladungen“ erzeugt, welche an den Orten der Nukleonen sitzen. Natürlich sind damit keine elektrischen Ladungen gemeint, sondern eine völlig neue Qualität dieser Elementarteilchen, neben der z. B. das Proton außerdem noch gewöhnliche elektrische Ladung trägt. So wie elektrische Ladungen nun ein elektrisches Feld erzeugen, sollen diese „Ladungen“ nach der Differentialgleichung

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \kappa^2 \psi = -4\pi \varrho$$

ein nukleares Feld ψ erzeugen. Für zwei Nukleonen an den Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 mit den „Ladungen“ g_1 und g_2 hat man dann

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 = g_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + g_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2);$$

die zugehörige Lösung der Differentialgleichung im statischen Falle ($d^2 \psi / dt^2 = 0$) ist jetzt

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = g_1 \frac{e^{-\kappa r - r_1}}{r - r_1} + g_2 \frac{e^{-\kappa r - r_2}}{r - r_2}.$$

Die Feldenergie E soll wieder in der Form

$$E = \frac{1}{2} \int \psi^2 dV$$

geschrieben werden können; dann ergeben sich wieder zwei Summanden E_{11} und E_{22} für die Selbstenergien der beiden Nukleonen und eine Wechselwirkungsenergie

$$W = \frac{1}{2} \int dV (\psi_1 \varrho_2 + \psi_2 \varrho_1) = g_1 g_2 \frac{e^{-\kappa r_{12}}}{r_{12}}$$

Es ergibt sich also eine dem *Coulombschen* Gesetz verwandte, aber infolge des Exponentialfaktors schneller mit der gegenseitigen Entfernung abklingende Kraftwirkung beider Nukleonen auf einander. Die vektorielle Ausgestaltung dieser Theorie (mit Hilfe von vier ψ -Funktionen, analog dem Auftreten des Vektorpotentials in der *Maxwellschen* Elektrodynamik) genügt weitgehend zur Darstellung der Erfahrung.

Die Kräfte klingen also auf Entfernungen von der Größenordnung $1/\kappa$ ab; da empirisch ein Abklingen bis auf etwa 1 bis $2 \cdot 10^{-13}$ cm stattfindet, kann man hieraus die Konstante $\kappa \sim 10^{13}$ cm $^{-1}$ abschätzen. Betrachtet man nun die obige Differentialgleichung, so besitzt sie natürlich nichtstatische Lösungen (auch für $\rho = 0$), welche analog zu den Lichtwellen der Strahlungstheorie sind. Bei einer Quantisierung der Theorie stellt sich dann aber heraus, daß infolge des Gliedes $\kappa^2 \psi$ ein prinzipieller Unterschied¹⁾ zwischen den Lichtquanten und den Korpuskeln der *Yukawa*-Theorie besteht: Die *Yukawaschen* Teilchen haben eine Ruhmasse $\mu = \hbar \kappa / c$, welche nach der angegebenen Größenordnung von κ einige hundert Elektronenmassen betragen muß; die Teilchen bewegen sich daher auch mit kleinerer als Lichtgeschwindigkeit. Diese Korpuskeln werden heute als Mesonen bezeichnet; daß sie außerdem zum Unterschied von Lichtquanten auch noch elektrische Ladung tragen, bedeutet eine weitere Komplizierung ihrer Beschreibung gegenüber der Strahlungstheorie, auf die hier nicht mehr eingegangen werden kann.

Genau wie ein quantenmechanisches System Lichtquanten emittieren und absorbieren kann, sofern seine Bestandteile elektrische Ladung tragen, kann ein System auch Mesonen emittieren und absorbieren, sofern seine Bestandteile die zur Ladung analogen, hierfür maßgebende Qualität besitzen. Dies ist aber eben für die Nukleonen der Fall. Natürlich treten solche Prozesse nur auf, soweit sie energetisch möglich sind. Infolge der hohen Ruhenergie der Mesonen (Größenordnung 100 MeV) erforderte das experimentelle Studium solcher Vorgänge allerdings einen Fortschritt der Versuchstechnik über die gewöhnliche Kern-

physik hinaus, die sich vorwiegend im Bereich zwischen 0,1 und 10 MeV abspielt. Bis vor wenigen Jahren noch war die kosmische Strahlung die einzige Stelle, an der die Natur dem Experimentator unmittelbar Mesonen anbot; seit etwas mehr als Jahresfrist gelang es den Physikern (vor allem in Berkeley) in steigendem Maße, auch künstlich Mesonen zu erzeugen, doch steht unser Wissen aus dieser Quelle verständlicherweise noch ganz am Anfang. Das Studium der kosmischen Strahlung ist hier in ähnlicher Weise einer echten Mesonenphysik vorausgegangen wie das Studium der natürlichen Radioaktivität bis etwa 1930 der eigentlichen Kernphysik vorausging. Dabei hat sich die Untersuchung der kosmischen Strahlung allerdings insofern als trügerisch für die kernphysikalische Erkenntnis erwiesen, als es sich nach den Befunden des letzten Jahres bei den Mesonen der Ultrastrahlung um eine andere Teilchensorte handelt als bei den Mesonen, welche in der Kernphysik eine Rolle spielen.

Wir sehen an diesen letzten Betrachtungen, wie stark die physikalische Problematik ist, die heute noch formend und weiterentwickelnd auch auf die Quantentheorie einwirkt. Die Aufwindung eines ganz neuen Anwendungsbereiches der Quantentheorie in der Kernphysik hat dazu geführt, die allgemeine Frage nach den möglichen Erscheinungsformen der Materie überhaupt aufzuwerfen und in analogen Übersetzungen und Erweiterungen der Strahlungstheorie die Möglichkeiten hierzu zu erblicken und ihre Tragweite abzutasten.

Es sei nicht verschwiegen, daß die hier angedeuteten jüngsten Entwicklungen über gewisse grundsätzliche Schwierigkeiten nicht hinweggeholfen haben. Schon in *Diracs* Löchertheorie (s. o.) traten die charakteristischen Konvergenzschwierigkeiten auf (unendlich große Polarisierbarkeit des Vakuums), die gesamte Strahlungstheorie wird von Konvergenzschwierigkeiten durchzogen (z. B. die unendlich große Selbstenergie des Elektrons, s. o.); die Übertragung der Grundbegriffe der Strahlungstheorie in die Mesonentheorie läßt die gleichen Schwierigkeiten auch dort entstehen. So resultieren notwendige Inkonsistenzen und ad hoc erfundene Abschnidevorschriften, die deutlich erkennen lassen, daß die bestehenden Theorien nur eine erste Skizze einer zukünftigen sind.

Um zu einer solchen künftigen Theorie zu gelangen, ist offenbar ein zusätzlicher Gedanke erforderlich. Der gegenwärtige Stand zeigt deutlich genug, an welcher Stelle die neue Idee eingearbeitet werden muß, ohne daß man schon eine zündende Idee besäße. Da die bestehende Quantentheorie zu versagen beginnt, wenn die Abstände der Teilchen die Größenordnung von 10^{-13} cm erreichen oder unterschreiten, darf man annehmen, daß eine neue Elementarkonstante etwa in Form einer „kleinsten Länge“ von dieser Größenordnung in die Theorie einzuführen ist. Die bisherigen Versuche dazu zerfallen im wesentlichen in zwei deutlich verschiedene Gruppen, deren jede sicher einen Teil der Wahrheit enthält. Der eine Weg, der schon im Rahmen der klassischen Elektrodynamik – wohl zuerst 1912 von *Mie* – versucht worden ist, wurde 1934 erneut von *Born* und *Infeld* eingeschlagen und besteht darin, durch nichtlineare Zusatzglieder in den Feldgleichungen Abweichungen der Lösungen in der Umgebung der Feldsingularität zu erreichen, welche z. B. die Selbstenergie endlich machen. Bei der Quantisierung dieser Theorie haben sich Schwierigkeiten ergeben, die bisher nicht überwunden werden konnten. Der andere Weg geht davon aus, daß unsere anschaulichen geometrischen Vorstellungen nicht nur in kosmischen Dimensionen entsprechend den Erkenntnissen der allgemeinen Relativitätstheorie versagen, sondern auch, wenn es sich um Teilchenabstände von 10^{-13} cm und weniger handelt (*March*). Die Erfindung einer geeigneten neuen Geometrie, die diesem Versagen unserer Anschauung im Kleinen Rechnung trägt und im Großen asymptotisch in die gewöhnliche euklidische übergeht, ist freilich bisher keineswegs gelungen. Eine sorgfältige Abstekung der Grenzen, bis zu welchen die heutige Quantentheorie gültig bleiben wird, ist mehrfach versucht worden. Der bedeutendste Versuch dazu aus den letzten Jahren ist von *Heisenberg* (1943) unternommen worden; er bietet ebenfalls vielleicht Ansätze zu einem Rahmen der künftigen Theorie.

Eingeg. am 10. Januar 1949.

[A 184]

¹⁾ Es gibt unter den Lösungen der Differentialgleichung keine Wellen kleinerer Frequenz als $\omega = \kappa c$; dem entspricht eine Mindestenergie $\hbar \omega = \hbar \kappa c$, aus welcher die Ruhmasse der einzelnen Korpuskel $\mu = \hbar \kappa / c$ berechnet werden kann.